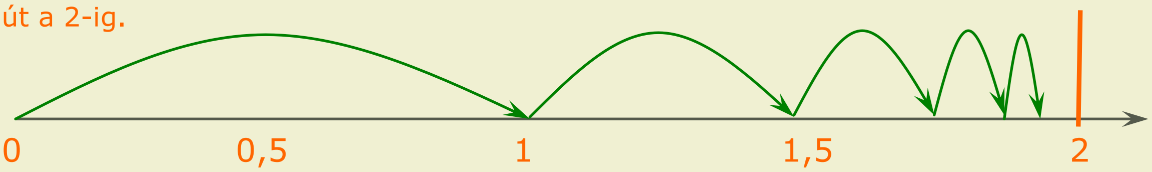
SOROK

Végtelen sok valós számból álló összegeket soroknak nevezzük. A sorban szereplő tagokat képzeljük el úgy, mint egy bolha ugrásait a számegyenesen. A sor összege – ha létezik ilyen – az a szám ahova a bolha ugrásai során eljut. Nézzük például a következős sort:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Itt a bolha fáradékony, ezért ugrásai egyre rövidülnek minden ugrása az előző ugrásának a fele. Véges sok ugrással sosem érheti el a 2-t, mert mindig fele akkorát ugrik, mint ami még a hátralévő út a 2-ig.

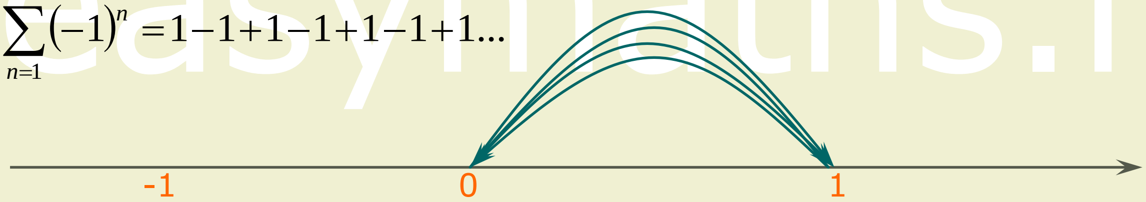


Ha viszont az ugrások száma végtelen, akkor a bolha éppen eljut a 2-be.

Egy másik bolha egyáltalán nem fáradékony, viszont meglehetősen zavarodottan ugrál.

Először ugrik 1-et, majd vissza ugrik 1-et. Utána megint ugrik 1-et, majd megint vissza.

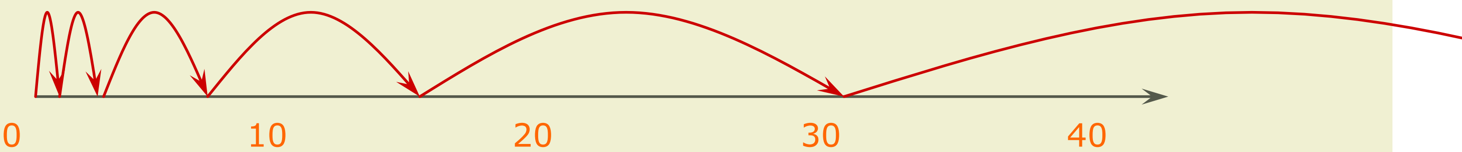
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+1\ldots$$



Ez a bolha az égvilágon sehova nem jut el, ha az ugrások száma végtelen.

Egy harmadik fajta bolha mindig előző ugrásának kétszeresét ugorja és így a végtelenbe jut el.

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n = 1+2+4+8+16+\ldots$$



Ebből a három esetből az első esetben nevezzük a sort konvergensnek, vagyis amikor a bolha az ugrásai során egy konkrét valós számhoz jut el, és ezt a valós számot nevezzük a sor összegének. Ha a bolha ugrásai során nem jut el sehova, vagy végtelenbe jut, akkor a sor divergens. A második és a harmadik sor tehát divergens, a másodiknak nincs összege, míg a harmadik sor összege végtelen.

SOROKKAL KAPCSOLATBAN KÉTFÉLE FELADATTÍPUS MERÜLHET FÖL

A MÉRTANIS SOR

MÉRTANI SOR ÖSSZEGKÉPLETE

Ha $|q|<1$ akkor $\sum_{0}^{\infty} a_1 \cdot q^n = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $|q|\geq 1$ akkor $\sum_{0}^{\infty} a_1 \cdot q^n =$ divergens

ÍME EGY PÉLDA!

$$\sum_{0}^{\infty} 5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = ?$$

Beazonosítjuk a_1-et és q-t:

$$\sum_{0}^{\infty} 5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = 5+5\cdot\frac{3}{4}+5\cdot\frac{9}{16}+\ldots$$

$$a_1=5 \quad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$$

tehát

$$\sum_{0}^{\infty} 5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{3}{4}} = 20$$

MÉG EGY PÉLDA:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3}{(-2)^n} = ?$$

Beazonosítjuk a_1-et és q-t:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3}{(-2)^n} = \frac{3}{-2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{-8}\ldots$$

$$a_1=\frac{3}{-2} \quad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{-1}{2}$$

tehát

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3}{(-2)^n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{-2}}{1-\frac{-1}{2}} = -1$$

ÉS A MÁSIK*

Ilyenkor mindig ez van:

Mivel $\lim a_n \neq 0$ ezért $\sum a_n$ divergens.

LÁSSUNK EGY PÉLDÁT!

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} = ?$$

mivel $\lim \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$ a sor divergens!

MÉG EGY PÉLDA:

$$\sum_{1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = ?$$

mivel $\lim \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2 \neq 0$ a sor divergens!

*AKINÉL ELHANGZANAK ILYENEK, HOGY GYÖK KRITÉRIUM, NA NEKIK KELL MÉG A KÖVETKEZŐ NÉHÁNY OLDAL IS SAJNA

ÉS MÉG EGY PÉLDA:

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3}{-2}\right)^n = ?$$

Beazonosítjuk a_1-et és q-t:

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3}{-2}\right)^n = \frac{3}{-2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{-8}\ldots$$

$$a_1=\frac{3}{-2} \quad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{-2}$$

sajna $|q|=\left|\frac{3}{-2}\right|\geq 1$ ezért a sor divergens!

SOROKKAL KAPCSOLATBAN KÉTFÉLE KÉRDÉS MERÜLHET FÖL

EZ A RÉSZ CSAK AZOKNAK KELL, AKIKNÉL ELHANGZANAK ILYENEK, HOGY GYÖK KRITÉRIUM MEG HÁNYADOS KRITÉRIUM

A SOR KONVERGENS VAGY DIVERGENS-E?

ez egy viszonylag könnyen megválaszolható kérdés

KONVERGENCIA-KRITÉRIUMOK

1. SZÜKSÉGES FELTÉTEL

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

2. LEIBNIZ-SOROK

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$
de nem biztos, hogy abszolút konvergens.

3. GYÖK KRITÉRIUM

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

4. HÁNYADOS KRITÉRIUM

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

5. ÖSSZEHASONLÍTÓ KRITÉRIUM

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nem negatív tagú sorok,
és egy bizonyos tagtól $a_n \leq b_n$ akkor

$\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ is konvergens

$\sum a_n$ divergens $\Rightarrow \sum b_n$ is divergens

6. HARMONIKUS SOROK

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ → konvergens ha $\alpha < 1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ → divergens, ha $\alpha \geq 1$

HA A SOR KONVERGENS, MI A SOR ÖSSZEGE?

erre sokszor egyáltalán nem tudunk válaszolni és különböző trükkök kellenek

A SOR ÖSSZEGÉNEK KISZÁMOLÁSA

1. MÉRTANI SOR ÖSSZEGE

$$ha \quad |q| < 1 \quad \text{akkor} \quad \sum_0^\infty a_1 \cdot q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$ha \quad |q| \geq 1 \quad \text{akkor} \quad \sum_0^\infty a_1 \cdot q^n = divergens$$

2. A SOR ÖSSZEGÉNEK KISZÁMOLÁSA A RÉSZLETÖSSZEG SOROZAT HATÁRÉRTÉKÉVEL

$\sum a_n = \lim s_n$ ahol $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

LÁSSUNK EGY PÉLDÁT:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = ?$$

a részletösszeg sorozat

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

mivel pedig $\lim s_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

$\sum a_n = \lim s_n = 1$ a sor összege.

1. SZÜKSÉGES FELTÉTEL

Ha $\lim a_n \neq 0$ akkor $\sum a_n$ divergens.

Nézzük meg, hogy konvergens-e például

$$\sum_1^\infty \frac{2n}{n+1}$$

A válasz az, hogy nem, mert $\lim \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$ és ezért a sor divergens.

Az állítás megfordítása viszont nem igaz, például hiába

$\lim \frac{1}{n} = 0$ ettől még $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ divergens.

2. LEIBNIZ-SOROK

A $\sum (-1)^n \cdot a_n$ sor konvergens, ha $a_n \to 0$ de nem biztos, hogy abszolút konvergens.

Az a sor, hogy

$$\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

tehát Leibniz-sor vagyis konvergens. De nem abszolút konvergens.

A $\sum a_n$ sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\sum |a_n|$ sor is konvergens.

$\sum_1^\infty \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ ami divergens, tehát az eredeti $\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ nem absz. konvergens

3. GYÖK KRITÉRIUM

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

Nézzük meg, hogy konvergens-e például

$$\sum \frac{5^n}{n^n}$$

Alkalmazzuk a gyök kritériumot:

$\lim \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^n}} = \lim \frac{5}{n} = 0 < 1$ és ezért a sor konvergens, sőt abszolút konvergens.

Itt van aztán ez, hogy

$$\sum \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2}$$

itt is alkalmazzuk a gyök kritériumot

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n} = \lim \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^3}{e^2} = e > 1$$ a sor divergens

4. HÁNYADOS KRITÉRIUM

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ akkor $\sum a_n$ absz. konvergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ akkor $\sum a_n$ divergens

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ akkor nem tudni mi van

Nézzük meg, hogy konvergens-e például

$$\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

Alkalmazzuk a hányados kritériumot. Azért a hányadost, mert a faktoriális nem szereti a gyök kritériumot:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \lim \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim \frac{2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} =$$

$$= \lim \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim 2 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

érdemes megjegyezni, hogy

$$(n+1)! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}\cdot(n+1)$$

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1)$$

és ezért a sor konvergens, sőt abszolút konvergens.

Itt van aztán ez, hogy

$$\sum \frac{n^2+3}{n^5+5n}$$

A gyök kritérium csődöt mond, mert

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2+3}{n^5+5n}} = 1$$

Jegyezzük meg, hogy polinom/polinom esetben csak az összehasonlító kritérium nyerő!
felülről becsüljük a sort

$$\frac{n^2+3}{n^5+5n} \le \frac{n^2+3n^2}{n^5} = \frac{4n^2}{n^5} = \frac{4}{n^3}$$

és ekkor

$\sum \frac{n^2+3}{n^5+5n}$ konvergens, mert a nála nagyobb $\sum \frac{4}{n^5}$ sor konvergens.